Méthodes Sémantiques en Déduction Modulo

Olivier HERMANT

Mardi 6 Décembre 2005

Déduction et Calcul

- Le calcul est la base des mathématiques.

Déduction et Calcul

- Le calcul est la base des mathématiques.
- Il a été oublié par la formalisation.

Déduction et Calcul

- Le calcul est la base des mathématiques.
- Il a été oublié par la formalisation.
- retrouvé par les règles de réécriture.

Déduction et Calcul

- Le calcul est la base des mathématiques.
- Il a été oublié par la formalisation.
- retrouvé par les règles de réécriture.
- besoin d'un équilibre : la Déduction Modulo.

Systèmes de déduction : la logique

- le langage est celui de la logique du premier ordre.

Systèmes de déduction : la logique

- le langage est celui de la logique du premier ordre.
- un séquent : $\Gamma \vdash P$

Système de Déduction : le calcul des séquents

$$\frac{}{\Gamma, P \vdash P}\text{axiome} \qquad \frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q}\text{coupure}$$

$$\frac{\Gamma, P, P \vdash Q}{\Gamma, P \vdash Q}\text{contr-l} \qquad \frac{}{\Gamma, \bot \vdash Q}\bot\text{-g}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash R \quad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma, P \vee Q \vdash R} \vee\text{-g} \qquad \frac{\Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash P \vee Q} \vee\text{-d} \qquad \frac{\Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \vee Q} \vee\text{-d}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \quad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma, P \Rightarrow Q \vdash R} \Rightarrow\text{-g} \qquad \frac{\Gamma, P \vdash Q}{\Gamma \vdash P \Rightarrow Q} \Rightarrow\text{-d}$$

$$\frac{\Gamma, \{c/x\}P \vdash Q}{\Gamma, \exists x P \vdash Q}\exists\text{-g},\ c \text{ constante fraîche} \qquad \frac{\Gamma \vdash \{t/x\}P}{\Gamma \vdash \exists x P}\exists\text{-d}$$

La règle de coupure : le détour

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q}\text{coupure}$$

- on prouve $\Gamma \vdash P$
- on prouve $\Gamma, P \vdash Q$
- on a prouvé $\Gamma \vdash Q$

La règle de coupure : le détour

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q}\text{coupure}$$

- on prouve $\Gamma \vdash P$
- on prouve $\Gamma, P \vdash Q$
- on a prouvé $\Gamma \vdash Q$
- correspond à l'application d'un lemme.

Système de Déduction : le calcul des séquents

$$\frac{}{\Gamma, P \vdash P}\text{axiome} \qquad \frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q}\text{coupure}$$

$$\frac{\Gamma, P, P \vdash Q}{\Gamma, P \vdash Q}\text{contr-l} \qquad \frac{}{\Gamma, \bot \vdash Q}\bot\text{-g}$$

$$\frac{\Gamma, P \vdash R \quad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma, P \vee Q \vdash R} \vee\text{-g} \qquad \frac{\Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash P \vee Q} \vee\text{-d} \qquad \frac{\Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \vee Q} \vee\text{-d}$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \quad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma, P \Rightarrow Q \vdash R} \Rightarrow\text{-g} \qquad \frac{\Gamma, P \vdash Q}{\Gamma \vdash P \Rightarrow Q} \Rightarrow\text{-d}$$

$$\frac{\Gamma, \{c/x\}P \vdash Q}{\Gamma, \exists x P \vdash Q}\exists\text{-g, } c \text{ constante fraîche} \qquad \frac{\Gamma \vdash \{t/x\}P}{\Gamma \vdash \exists x P}\exists\text{-d}$$

La règle de coupure : le détour

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q} \text{ coupure}$$

- on prouve $\Gamma \vdash P$ et $\Gamma, P \vdash Q$
- on a prouvé $\Gamma \vdash Q$.
- correspond à l'application d'un lemme : est adaptée pour un être humain.
- n'est pas adaptée aux systèmes de démonstration automatiques.

La règle de coupure : le détour

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q} \text{ coupure}$$

- on prouve $\Gamma \vdash P$ et $\Gamma, P \vdash Q$
- on a prouvé $\Gamma \vdash Q$.
- correspond à l'application d'un lemme : est adaptée pour un être humain.
- n'est pas adaptée aux systèmes de démonstration automatiques.
- elle est redondante !

La règle de coupure : le détour

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q} \text{ coupure}$$

- on prouve $\Gamma \vdash P$ et $\Gamma, P \vdash Q$
- on a prouvé $\Gamma \vdash Q$.
- correspond à l'application d'un lemme : est adaptée pour un être humain.
- n'est pas adaptée aux systèmes de démonstration automatiques.
- elle est redondante !
- deux méthodes principales de démonstration :
  - par la normalisation.

La règle de coupure : le détour

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q} \text{ coupure}$$

- on prouve $\Gamma \vdash P$ et $\Gamma, P \vdash Q$
- on a prouvé $\Gamma \vdash Q$.
- correspond à l'application d'un lemme : est adaptée pour un être humain.
- n'est pas adaptée aux systèmes de démonstration automatiques.
- elle est redondante !
- deux méthodes principales de démonstration :
  - par la normalisation.
  - par des méthodes sémantiques.

La règle de coupure : le détour

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q \quad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q} \text{ coupure}$$

- on prouve $\Gamma \vdash P$ et $\Gamma, P \vdash Q$
- on a prouvé $\Gamma \vdash Q$.
- correspond à l'application d'un lemme : est adaptée pour un être humain.
- n'est pas adaptée aux systèmes de démonstration automatiques.
- elle est redondante !
- deux méthodes principales de démonstration :
  - par la normalisation.
  - par des méthodes sémantiques.
- son élimination implique de nombreuses propriétés fondamentales.

Axiomes vs. réécriture

Axiomes	Réécriture
$x + S(y) = S(x + y)$	$x + S(y) \longrightarrow S(x + y)$
$x + 0 = x$	$x + 0 \longrightarrow x$
$x * 0 = 0$	$x * 0 \longrightarrow 0$
$x * S(y) = x + x * y$	$x * S(y) \longrightarrow x + x * y$
$(x * y = 0) \Leftrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$	$(x * y = 0) \longrightarrow (x = 0 \vee y = 0)$
$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\mathcal{T} \vdash 2 * 2 = 4}}{\mathcal{T} \vdash \exists x(2 * x = 4)}$	$\dfrac{\overline{\vdash_{\mathcal{R}} 4 = 4}}{\vdash_{\mathcal{R}} \exists x(2 * x = 4)}$

Déduction modulo : les règles de réécriture

- Forme générale :

$$l \longrightarrow r$$

Déduction modulo : les règles de réécriture

- Forme générale :

$$l \longrightarrow r$$

- utilisation : Si $t = l_\sigma$ alors on le remplace par r_σ

Déduction modulo : les règles de réécriture

- Forme générale :

$$l \longrightarrow r$$

- utilisation : Si $t = l_\sigma$ alors on le remplace par r_σ
- règles de réécriture sur des termes :

$$x + S(y) \longrightarrow S(x + y)$$

Déduction modulo : les règles de réécriture

- Forme générale :

$$l \longrightarrow r$$

- utilisation : Si $t = l_\sigma$ alors on le remplace par r_σ
- règles de réécriture sur des termes :

$$x + S(y) \longrightarrow S(x + y)$$

- et sur des **propositions** :

$$x * y = 0 \longrightarrow x = 0 \vee y = 0$$

- avantage : beaucoup de puissance.

Déduction modulo : le calcul des séquents modulo

$$\frac{}{\Gamma, P \vdash Q}\text{axiome } P \equiv_{\mathcal{R}} Q \qquad \frac{\Gamma, P \vdash R \quad \Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash R}\text{coupure } P \equiv_{\mathcal{R}} Q$$

$$\frac{\Gamma, P, Q \vdash R}{\Gamma, P \vdash R}\text{contr-g } P \equiv_{\mathcal{R}} Q \qquad \frac{}{\Gamma, P \vdash Q}\bot\text{-g } P \equiv_{\mathcal{R}} \bot$$

$$\frac{\Gamma \vdash P \quad \Gamma, Q \vdash R}{\Gamma, S \vdash R} \Rightarrow\text{-g } P \Rightarrow Q \equiv_{\mathcal{R}} S \qquad \frac{\Gamma, P \vdash Q}{\Gamma \vdash S} \Rightarrow\text{-d } P \Rightarrow Q \equiv_{\mathcal{R}} S$$

$$\frac{\Gamma, \{c/x\}P \vdash Q}{\Gamma, R \vdash Q}\exists\text{-g}^* \ \exists x P \equiv_{\mathcal{R}} R \qquad \frac{\Gamma \vdash \{t/x\}P}{\Gamma \vdash R}\exists\text{-d } \exists x P \equiv_{\mathcal{R}} R$$

Déduction modulo : les règles de réécriture

- Forme générale :

$$l \longrightarrow r$$

- utilisation : Si $t = l_\sigma$ alors on le remplace par r_σ
- règles de réécriture sur des termes :

$$x + S(y) \longrightarrow S(x + y)$$

- et sur des **propositions** :

$$x * y = 0 \longrightarrow x = 0 \vee y = 0$$

- avantage : beaucoup de puissance.
- problème : la règle de coupure n'est pas forcément éliminable.

Déduction modulo : les règles de réécriture

- Forme générale :

$$l \longrightarrow r$$

- utilisation : Si $t = l_\sigma$ alors on le remplace par r_σ
- règles de réécriture sur des termes :

$$x + S(y) \longrightarrow S(x + y)$$

- et sur des **propositions** :

$$x * y = 0 \longrightarrow x = 0 \vee y = 0$$

- avantage : beaucoup de puissance.
- problème : la règle de coupure n'est pas forcément éliminable.
- trouver des conditions pouvant assurer l'élimination des coupures.

Sommaire

I. Méthode sémantique d'élimination des coupures :
   a. Modèles, Correction, Complétude.
   b. La preuve de complétude de Henkin.

II. Cas sans coupure :
   a. Complétude forte, conséquence.
   b. Nouvelles définitions.
   c. Complétion de Henkin sans coupures.

III. Différentes conditions sur les règles de réécriture :
   a. Ordre.
   b. Positivité.
   c. Modularité.

IV. Sujets avancés :
   a. Normalisation et Redondance.
   b. Déduction Modulo intuitionniste.

Les modèles

- en logique classique.
- extension des tables de vérité aux cas des quantificateurs.
- $|\exists x\ P| = 1$ si et seulement si il existe $d \in D$ tel que $|(d/x)P| = 1$.

Les modèles

- en logique classique.
- extension des tables de vérité aux cas des quantificateurs.
- $|\exists x\ P| = 1$ si et seulement si il existe $d \in D$ tel que $|(d/x)P| = 1$.
- en Déduction Modulo, une condition supplémentaire :

$$\text{si } P \equiv_{\mathcal{R}} Q \text{ alors } |P| = |Q|$$

Correction, Complétude

- Relier les deux approches : preuve et modèle.

Correction, Complétude

- Relier les deux approches : preuve et modèle.
- Correction : si $\Gamma \vdash \Delta$ alors $\Gamma \models \Delta$.

Correction, Complétude

- Relier les deux approches : preuve et modèle.
- Correction : si $\Gamma \vdash \Delta$ alors $\Gamma \models \Delta$.
- Complétude : si $\Gamma \models \Delta$ alors $\Gamma \vdash \Delta$.

Correction, Complétude

- Relier les deux approches : preuve et modèle.
- Correction : si $\Gamma \vdash \Delta$ alors $\Gamma \models \Delta$.
- Complétude : si $\Gamma \models \Delta$ alors $\Gamma \vdash \Delta$.
- autre formulation : si $\Gamma \nvdash$ alors Γ possède au moins un modèle.

Preuve de Henkin

- soit une théorie $\mathcal{T}$ telle que $\mathcal{T} \nvdash^{cf}$ (cohérente).
- on veut définir le modèle : $\mathcal{T} \vdash A$ ssi $|A| = 1$.
- il nous manque des informations.
  Par ex : si $\mathcal{T} = P \vee Q$.

Preuve de Henkin

- soit une théorie $\mathcal{T}$ telle que $\mathcal{T} \not\vdash^{cf}$ (cohérente).
- on veut définir le modèle : $\mathcal{T} \vdash A$ ssi $|A| = 1$.
- il nous manque des informations.
  Par ex : si $\mathcal{T} = P \vee Q$.
- on doit la **compléter** en Γ.
- Γ doit être **cohérente**, et
- doit admettre des **témoins** existentiels.

Preuve de Henkin

- soit une théorie $\mathcal{T}$ telle que $\mathcal{T} \not\vdash^{cf}$ (cohérente).
- on veut définir le modèle : $\mathcal{T} \vdash A$ ssi $|A| = 1$.
- il nous manque des informations.
  Par ex : si $\mathcal{T} = P \vee Q$.
- on doit la **compléter** en Γ.
- Γ doit être **cohérente**, et
- doit admettre des **témoins** existentiels.
- définition du modèle : $\Gamma \vdash A$ ssi $|A| = 1$.

Correction, Complétude

- Correction : si $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \models_{\mathcal{R}} \Delta$.
- Complétude : si $\Gamma \models_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \Delta$.

Complétude forte

- Correction : si $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \models_{\mathcal{R}} \Delta$.
- Complétude **forte** : si $\Gamma \models_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} \Delta$.

Complétude forte

- Correction : si $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \models_{\mathcal{R}} \Delta$.
- Complétude **forte** : si $\Gamma \models_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} \Delta$.
- corollaire : si $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} \Delta$

Complétude forte

- Correction : si $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \models_{\mathcal{R}} \Delta$.
- Complétude **forte** : si $\Gamma \models_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} \Delta$.
- corollaire : si $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}} \Delta$ alors $\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} \Delta$
- formulation équivalente : si $\Gamma \not\vdash^{cf}_{\mathcal{R}}$ alors Γ a au moins un modèle.

Nouvelles définitions

- théorie complète : $\Gamma \vdash A$ ou $\Gamma \vdash \neg A$.

Nouvelles définitions

- théorie complète : $\Gamma \vdash A$ ou $\Gamma \vdash \neg A$.
- théorie complète sans coupure : $\Gamma, A \nvdash^{cf}_{\mathcal{R}}$ implique $A \in \Gamma$.

Nouvelles définitions

- théorie complète : $\Gamma \vdash A$ ou $\Gamma \vdash \neg A$.
- théorie complète sans coupure : $\Gamma, A \nvdash_{\mathcal{R}}^{cf}$ implique $A \in \Gamma$.
- on peut très bien avoir : $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{R}}^{cf}$, $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A$ **et** Γ cohérente!

$$\frac{\Gamma, A \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} \quad \Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf}}\textbf{coupure}$$

Nouvelles définitions

- théorie complète : $\Gamma \vdash A$ ou $\Gamma \vdash \neg A$.
- théorie complète sans coupure : $\Gamma, A \nvdash_{\mathcal{R}}^{cf}$ implique $A \in \Gamma$.
- on peut très bien avoir : $\Gamma, A \vdash_{\mathcal{R}}^{cf}$, $\Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A$ **et** Γ cohérente!

$$\frac{\Gamma, A \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} \qquad \Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A}{\Gamma \vdash_{\mathcal{R}}^{cf}}\textbf{coupure}$$

- Les définitions deviennent donc :
  - Cohérence : $\Gamma \nvdash_{\mathcal{R}}^{cf} \bot$
  - Complétude (saturation) : $\Gamma, P \vdash_{\mathcal{R}}^{cf}$ ou $P \in \Gamma$.
  - témoins de Henkin : $\Gamma, \exists x P \nvdash_{\mathcal{R}}^{cf}$ implique $\{t/x\}P \in \Gamma$ pour un certain t.

Complétion de Henkin sans coupure

Soit une théorie cohérente Γ_0, on la sature :

- Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de constantes fraîches (par rapport à Γ_0)

$\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ et Γ est cohérent, complète, et admet des témoins de Henkin.

Complétion de Henkin sans coupure

Soit une théorie cohérente Γ_0, on la sature :

- Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de constantes fraîches (par rapport à Γ_0)
- on énumère les propositions du langage enrichi :

$$P_0, ..., P_n, ...$$

$\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ et Γ est cohérent, complète, et admet des témoins de Henkin.

Complétion de Henkin sans coupure

Soit une théorie cohérente Γ_0, on la sature :

- Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de constantes fraîches (par rapport à Γ_0)
- on énumère les propositions du langage enrichi :

$$P_0, \ldots, P_n, \ldots$$

- si $\Gamma_n, P_n \not\vdash^{cf}_{\mathcal{R}}$ alors $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{P_n\}$
- de plus si P_n est quantifiée existentiellement ($P = \exists x Q$), soit $c \in \mathcal{C}$ fraîche. On pose $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{P_n, \{c/x\}Q\}$
- Sinon, $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$

$\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ et Γ est cohérent, complète, et admet des témoins de Henkin.

Complétion de Henkin sans coupure

Soit une théorie cohérente Γ_0, on la sature :

- Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de constantes fraîches (par rapport à Γ_0)
- on énumère les propositions du langage enrichi :

$$P_0, \ldots, P_n, \ldots$$

  - si $\Gamma_n, P_n \not\vdash_{\mathcal{R}}^{cf}$ alors $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{P_n\}$
  - de plus si P_n est quantifiée existentiellement ($P = \exists x Q$), soit $c \in \mathcal{C}$ fraîche. On pose $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{P_n, \{c/x\}Q\}$
  - Sinon, $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n$
- On pose $\Gamma = \bigcup \Gamma_n$

$\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ et Γ est cohérent, complète, et admet des témoins de Henkin.

Définition du modèle : Modulo le 3ème type

Pour les atomes normaux :

$$\begin{array}{rcll} \Gamma, A \not\vdash^{cf} & \Rightarrow & |A| & := 1 \\ \Gamma \not\vdash^{cf} A & \Rightarrow & |A| & := 0 \end{array}$$

- Que fait on des propositions du troisème type?
  - sans réécriture : si $\Gamma, A \vdash^{cf}$ et $\Gamma \vdash^{cf} A$, on fixe $|A|$ comme on veut.
- En Déduction Modulo, on a l'obligation d'avoir :

$$P \equiv_{\mathcal{R}} Q \text{ implique } |P| = |Q|$$

Définition du modèle : Modulo le 3ème type

Pour les atomes normaux :

$$\begin{array}{rcl} \Gamma, A \nvdash^{cf} & \Rightarrow & |A| := 1 \\ \Gamma \nvdash^{cf} A & \Rightarrow & |A| := 0 \end{array}$$

- Que fait on des propositions du troisème type?
  - sans réécriture : si $\Gamma, A \vdash^{cf}$ et $\Gamma \vdash^{cf} A$, on fixe $|A|$ comme on veut.
- En Déduction Modulo, on a l'obligation d'avoir :

$$P \equiv_{\mathcal{R}} Q \text{ implique } |P| = |Q|$$

- Pas un degré de liberté, une contrainte supplémentaire.
- C'est **ici** qu'interviennent les conditions sur les règles de réécriture.
- Jusque là, on a un traitement uniforme.

Condition d'ordre

Condition On suppose qu'il existe un ordre bien fondé $\succ$ tel que :

- Il possède la propriété de la sous-formule. Si P est une sous-formule de Q, alors $Q \succ P$. Ex :

$$P \wedge (\exists x Q(x)) \succ \exists x Q(x) \succ Q(0)$$

- $\mathcal{R}$ satisfait cet ordre : si $A \rightarrow B$ alors $A \succ B$.

Condition d'ordre

Condition On suppose qu'il existe un ordre bien fondé $\succ$ tel que :

- Il possède la propriété de la sous-formule. Si P est une sous-formule de Q, alors $Q \succ P$. Ex :

$$P \wedge (\exists x Q(x)) \succ \exists x Q(x) \succ Q(0)$$

- $\mathcal{R}$ satisfait cet ordre : si $A \rightarrow B$ alors $A \succ B$.

- interprétation des atomes normaux :

$$\begin{array}{rcll} \Gamma, A \nvdash^{cf}_{\mathcal{R}} & \Rightarrow & |A| & := 1 \\ & \text{sinon} & |A| & := 0 \end{array}$$

Condition d'ordre

Condition On suppose qu'il existe un ordre bien fondé $\succ$ tel que :

- Il possède la propriété de la sous-formule. Si P est une sous-formule de Q, alors $Q \succ P$. Ex :

$$P \wedge (\exists x Q(x)) \succ \exists x Q(x) \succ Q(0)$$

- $\mathcal{R}$ satisfait cet ordre : si $A \rightarrow B$ alors $A \succ B$.

- interprétation des atomes normaux :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma, A \nvdash^{cf}_{\mathcal{R}} & \Rightarrow & |A| := 1 \\ & \text{sinon} & |A| := 0 \end{array}$$

- interprétation des formules : construction d'un arbre.

$$\begin{array}{ccc} & P \wedge Q & \\ \swarrow & & \searrow \\ P & & Q \\ \vdots & & \vdots \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \exists x R(x) & \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ R(t_0) & \ldots & R(t_n) \\ \vdots & & \vdots \end{array} \qquad \begin{array}{c} A \\ \downarrow \\ A \downarrow \\ \vdots \end{array}$$

Condition de positivité

Condition On suppose que les règles propositionnelles sont positives. si $A \longrightarrow P \in \mathcal{R}$ alors les propositions atomiques de P occurent à des positions positives. Ex :

$$\begin{array}{rcl} A(0) & \longrightarrow & \forall x A(x) \\ A(1) & \longrightarrow & B \wedge A(0) \end{array}$$

Condition de positivité

Condition On suppose que les règles propositionnelles sont positives. si $A \rightarrow P \in \mathcal{R}$ alors les propositions atomiques de P occurent à des positions positives. Ex :

$$\begin{array}{rcl} A(0) & \rightarrow & \forall x A(x) \\ A(1) & \rightarrow & B \wedge A(0) \end{array}$$

- Pour chaque atome A (y compris non normal) :

$$\begin{array}{llll} \text{si } \Gamma, A \nvdash^{cf}_{\mathcal{R}} & \text{alors} & |A| & := 1 \\ & \text{sinon} & |A| & := 0 \end{array}$$

Condition de positivité

Condition On suppose que les règles propositionnelles sont positives. si $A \rightarrow P \in \mathcal{R}$ alors les propositions atomiques de P occurent à des positions positives. Ex :

$$\begin{array}{rcl} A(0) & \rightarrow & \forall x A(x) \\ A(1) & \rightarrow & B \wedge A(0) \end{array}$$

- Pour chaque atome A (y compris non normal) :

$$\begin{array}{lll} \text{si } \Gamma, A \nvdash^{cf}_{\mathcal{R}} & \text{alors} & |A| := 1 \\ & \text{sinon} & |A| := 0 \end{array}$$

- point difficile : prouver que c'est un modèle des règles de réécriture.

Deux conditions ensemble

Condition On peut emboîter les deux conditions précédentes.

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\succ} \bigcup \mathcal{R}_{+}$$

à condition que les règles de réécriture de $\mathcal{R}_{+}$ soient normales pour $\mathcal{R}_{\succ}$.

Construction du modèle :

Deux conditions ensemble

Condition On peut emboîter les deux conditions précédentes.

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\succ} \bigcup \mathcal{R}_{+}$$

à condition que les règles de réécriture de $\mathcal{R}_{+}$ soient normales pour $\mathcal{R}_{\succ}$.

Construction du modèle :

1. on interprète tous les atomes $\mathcal{R}_{\succ}$-normaux.

Deux conditions ensemble

Condition On peut emboîter les deux conditions précédentes.

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\succ} \bigcup \mathcal{R}_{+}$$

à condition que les règles de réécriture de $\mathcal{R}_{+}$ soient normales pour $\mathcal{R}_{\succ}$.

Construction du modèle :

1. on interprète tous les atomes $\mathcal{R}_{\succ}$-normaux.
2. on définit l'interprétation par induction sur $\succ$.

Deux conditions ensemble

Condition On peut emboîter les deux conditions précédentes.

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{\succ} \bigcup \mathcal{R}_{+}$$

à condition que les règles de réécriture de $\mathcal{R}_{+}$ soient normales pour $\mathcal{R}_{\succ}$.

Construction du modèle :

1. on interprète tous les atomes $\mathcal{R}_{\succ}$-normaux.
2. on définit l'interprétation par induction sur $\succ$.
3. on prouve que c'est aussi un modèle de $\mathcal{R}_{+}$.

Quatrième condition

HOL

La normalisation : contre-exemple

- la règle de Dowek et Werner :

$$R \in R \rightarrow \forall y (y \simeq R \Rightarrow \neg y \in R)$$

  - est incohérente :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash_{\mathcal{R}} R \in R} \quad \dfrac{\vdots}{R \in R \vdash_{\mathcal{R}}}}{\vdash_{\mathcal{R}}} \text{ coupure}$$

  - ne possède pas la propriété de normalisation : le procédé de réduction boucle.

La normalisation : contre-exemple

- la règle de Dowek et Werner :

$$R \in R \to \forall y (y \simeq R \Rightarrow \neg y \in R)$$

  - est incohérente :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash_{\mathcal{R}} R \in R} \quad \dfrac{\vdots}{R \in R \vdash_{\mathcal{R}}}}{\vdash_{\mathcal{R}}} \text{ coupure}$$

  - ne possède pas la propriété de normalisation : le procédé de réduction boucle.
- première modification : remplacer $\neg P$ par $P \Rightarrow C$.

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash_{\mathcal{R}} R \in R, C} \quad \dfrac{\vdots}{R \in R \vdash_{\mathcal{R}} C}}{\vdash_{\mathcal{R}} C} \text{ coupure}$$

La normalisation : contre-exemple

- raffinons encore un peu : C remplacé par $A \vee \neg A$.

La normalisation : contre-exemple

- raffinons encore un peu : C remplacé par $A \vee \neg A$.
- on a toujours :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash_{\mathcal{R}} R \in R, A \vee \neg A} \quad \dfrac{\vdots}{R \in R \vdash_{\mathcal{R}} A \vee \neg A}}{\vdash_{\mathcal{R}} A \vee \neg A} \text{ coupure}$$

La normalisation : contre-exemple

- raffinons encore un peu : C remplacé par $A \vee \neg A$.
- on a toujours :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash_{\mathcal{R}} R \in R, A \vee \neg A} \quad \dfrac{\vdots}{R \in R \vdash_{\mathcal{R}} A \vee \neg A}}{\vdash_{\mathcal{R}} A \vee \neg A} \text{ coupure}$$

- mais on a aussi :

$$\dfrac{\dfrac{\overline{A \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A} \text{ axiome}}{\vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A, \neg A} \neg\text{-droit}}{\vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A \vee \neg A} \vee\text{-droit}$$

La normalisation : contre-exemple

- raffinons encore un peu : C remplacé par $A \vee \neg A$.
- on a toujours :

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\vdash_{\mathcal{R}} R \in R, A \vee \neg A} \quad \dfrac{\vdots}{R \in R \vdash_{\mathcal{R}} A \vee \neg A}}{\vdash_{\mathcal{R}} A \vee \neg A} \text{ coupure}$$

- mais on a aussi :

$$\dfrac{\dfrac{\overline{A \vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A} \text{ axiome}}{\vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A, \neg A} \neg\text{-droit}}{\vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A \vee \neg A} \vee\text{-droit}$$

- est-ce généralisable ?

La normalisation : contre-exemple

La règle : $R \in R \rightarrow \forall y(y \simeq R \Rightarrow (y \in R \Rightarrow (A \vee \neg A)))$

- est une tautologie (classique).

La normalisation : contre-exemple

La règle : $R \in R \rightarrow \forall y(y \simeq R \Rightarrow (y \in R \Rightarrow (A \vee \neg A)))$

- est une tautologie (classique).
- Tout modèle booléen est modèle de $\mathcal{R}$. Élimination des coupures.

La normalisation : contre-exemple

La règle : $R \in R \rightarrow \forall y (y \simeq R \Rightarrow (y \in R \Rightarrow (A \vee \neg A)))$

- est une tautologie (classique).
- Tout modèle booléen est modèle de $\mathcal{R}$. Élimination des coupures.
- Pas de normalisation. Le processus de réduction boucle toujours : $C \sim A \vee \neg A$.

Sémantiques intuitionnistes

- Algèbres de Heyting.
- Structures de Kripke.

Sémantiques intuitionnistes

- Algèbres de Heyting.
- Structures de Kripke.

$$
\begin{tikzcd}
\beta & & \gamma \\
& \alpha \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

- $\alpha \Vdash A \Rightarrow B$ ssi $\forall \beta \geq \alpha$, $\beta \Vdash A$ implique $\beta \Vdash B$.

Élimination des coupures intuitionniste

- Extension directe des preuves classiques.

Élimination des coupures intuitionniste

- Extension directe des preuves classiques.
- À condition de raffiner les définitions :
  - A-cohérence : $\Gamma \not\vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A$
  - A-complétude :$\Gamma, P \not\vdash_{\mathcal{R}}^{cf} A$ implique $P \in \Gamma$
  - A-témoins de Henkin.

Élimination des coupures intuitionniste

- Extension directe des preuves classiques.
- À condition de raffiner les définitions :
  - A-cohérence : $\Gamma \not\vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A$
  - A-complétude :$\Gamma, P \not\vdash^{cf}_{\mathcal{R}} A$ implique $P \in \Gamma$
  - A-témoins de Henkin.
- $K = \{\Gamma | \Gamma, A\text{-complètes, -cohérentes, -Henkin}\}$
- $P \in \Gamma$ implique $\Gamma \Vdash P$

Contenu calculatoire

- Ne peut pas être la normalisation.

Contenu calculatoire

- Ne peut pas être la normalisation.
- la contraposée de la complétude : un contre-modèle.
- Impossibilité de le construire : une preuve de $\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} \Delta$

Contenu calculatoire

- Ne peut pas être la normalisation.
- la contraposée de la complétude : un contre-modèle.
- Impossibilité de le construire : une preuve de $\Gamma \vdash^{cf}_{\mathcal{R}} \Delta$
- Construction d'un tableau.

Merci